مقدمه‌ای بر نظریهٔ بازیها

پویا رونق

در این مقاله به الفبای نظریهٔ بازیها خواهیم پرداخت. شما را با مفاهیم اولیه در نظریهٔ مقدماتی بازیها آشنا خواهیم کرد. سپس نمونه‌هایی از بازیهای معروف در این نظریه، معرفی می‌شوند و با آنها توانایی تحلیل مقدماتی بازیها را به‌دست خواهید آورد.

۱. مفاهیم اولیه

در زندگی با بازیهای زیادی سروکار داریم. کلمهٔ بازی معمولاً ما را به یاد بازیهایی چون شطرنج، فوتبال و یا بازیهای کامپیوتری می‌اندازد. اما رقابتهای اقتصادی شرکتهای تجاری، تقابل مدیران و نیروی انسانی، جریان دادگاههای قضایی، کشمکشهای سیاسی میان کشورها، نبرد روان‌شناختی خیر و شر و حتی تلاش گونه‌ها برای زیست و بقا، نمونه‌هایی از رفتارهایی است که می‌توان آنها را «بازی» تصور کرد. در نظریهٔ بازیها، سعی می‌کنیم به این بازیها، مدلهای معادلاتی، ترکیبیاتی و منطقی نسبت دهیم و از این طریق سرنوشت آنها را تحلیل و پیش‌بینی کنیم.

مجموعهٔ «بازیکن»های بازی را به $N = \{۱, ۲, \dots, n\}$ نمایش می‌دهیم. کانوی[1] «بازی زندگی» [1] را به‌عنوان بازی‌ای بدون بازیکن ($N = \varnothing$) معرفی کرده است. بازیهایی چون جورچین که در آنها n مساوی یک است، در نظریه‌ای معروف به نظریهٔ تصمیم[2] بررسی می‌شوند. در بازیهایی که با آنها سروکار داریم، می‌توانیم از **وضعیت** بازی (که همهٔ اطلاعات وضعیت کنونی بازی در آن لحاظ شده است) و **حرکت** از وضعیتی به وضعیتی دیگر صحبت کنیم. «اطلاع» بازیکنان از وضعیت بازی، در بازیهای مختلف متفاوت است. آیا بازیکنان از تمام حرکات گذشته مطلع‌اند؟ آیا از برامد آزمایشهای تصادفی‌ای که ممکن است رخ دهند مطلع‌اند؟ در بازی **با اطلاعات کامل**[3] (مثل شطرنج) پاسخ هر دو سؤال بالا مثبت است. در شطرنج ممکن است وابسته به وضعیت بازی، بازیکنی بتواند اسب خود را حرکت دهد و یا نتواند. معمولاً با بازیهایی که این‌طور نیستند سروکار داریم: بازیهایی را که در آنها هردو بازیکن در هر نوبت حرکات مُجاز یکسانی دارند **منصفانه** می‌نامیم.

۲. مثالی از بازی

روی میز چند تودهٔ لوبیا به‌ترتیب با $x_۱$، $x_۲$، ... و x_n لوبیا قرار دارد. در این بازی دو نفر به‌نوبت بازی می‌کنند و در هر نوبت یکی از توده‌ها را انتخاب می‌کنند و حداقل یک لوبیا از آن توده برمی‌دارند. برداشتن لوبیاها از بیش

1. Conway 2. decision theory 3. perfect information

از یک توده و همچنین برنداشتن لوبیا در نوبت، مُجاز نیست. هر بازیکن مجاز است که در نوبت خود یک تودهٔ لوبیا را به‌طورکامل بردارد. بازنده کسی است که حرکتی نداشته باشد و بازیکن دیگر برنده است. این بازی را بازی **نیمِ n توده‌ای** می‌نامیم. هر بازی نیم حتماً برنده خواهد داشت (چرا؟). نیم بازی کنید![4]

در بازی نیم یک‌توده‌ای، بازیکن اول همواره می‌تواند با برداشتن همهٔ لوبیاها برنده شود. در چنین حالتی می‌گوییم بازیکن اول **استراتژی برد** دارد. در بازی نیم دوتوده‌ای، اگر تعداد لوبیاهای دو توده یکسان باشد، بازیکن دوم همواره از دسته‌ای که در نوبت قبل دست نخورده است آن‌قدر لوبیا برمی‌دارد که تعداد لوبیاهای دو دسته باز هم برابر شود. به‌این‌ترتیب بازیکن دوم بازی را به وضعیت $(0,0)$ می‌رساند و در نتیجه بازیکن دوم استراتژی برد دارد. اما اگر تعداد لوبیاها برابر نباشد بازیکن اول از تودهٔ بزرگ‌تر آن‌قدر لوبیا برمی‌دارد تا تعداد لوبیاهای دو دسته برابر شود. در این‌صورت او به بازیکن دومِ حالت قبل تبدیل خواهد شد و در نتیجه برنده می‌شود. پس در حالتی که تعداد لوبیاها برابر نیست، بازیکن اول استراتژی برد دارد. در بخش ۵ این بازی را در حالت کلی بررسی می‌کنیم.

۳. چندتعریف

تعریف ۱ (بازی ترکیبیاتی). بازی‌ای را بازی ترکیبیاتی می‌نامیم که در آن

۱. دو بازیکن به‌نوبت بازی می‌کنند.

۲. قوانین بازی تعیین می‌کنند که از وضعیتی در بازی به چه وضعیتهایی می‌توان رسید (تعیین حرکات مُجاز).

۳. بازی هنگامی تمام می‌شود که حرکت دیگری ممکن نباشد و بازیکنی که آخرین حرکت را می‌کند برنده است. بازیهایی را که این شرط را ارضا می‌کنند **بازیهای با قاعدهٔ نرمال** می‌نامیم. در مقابل بازیهایی را که در آنها این بازیکن بازنده است **بازیهای با قاعدهٔ میزِر** می‌نامیم.

۴. مستقل از اینکه چگونه بازی شود، بازی در تعدادی متناهی حرکت پایان می‌پذیرد. (این بازیها را **بازیهای با شرط پایانی** می‌نامیم.)

معمولاً با بازیهایی سروکار داریم که در آنها تعداد وضعیتهای بازی متناهی است.

تعریف ۲ (استراتژی برد). اگر در بازی ترکیبیاتی‌ای یکی از بازیکنها بتواند با پیروی از الگوریتمی در بازی پیروز شود، می‌گوییم آن بازیکن استراتژی برد دارد.

فرض کنید در بازی‌ای، استراتژی برد با بازیکن اول باشد. می‌توان به این بازی پس از اولین حرکت، به‌دید بازی‌ای جدید نگاه کرد که در آن استراتژی برد با نفر دوم (بازیکن اول در بازی سابق) است. چون به چنین تحلیلهایی به دفعات نیاز پیدا می‌کنیم، برد و باخت را به‌جای آنکه به بازی نسبت دهیم، به وضعیت خاصی از بازی نسبت می‌دهیم:

4. http://www.chlond.demon.co.uk/Nim.html

تعریف ۳ (وضعیتهای P و N). Pـوضعیت[5]، وضعیتی از بازی است که در آن بازیکنی که آخرین حرکت را کرده است استراتژی برد دارد. به‌همین ترتیب، در Nـوضعیت[6] بازیکنی که می‌خواهد حرکت بعدی را بکند استراتژی برد دارد.

نتیجهٔ ۴ .

۱. هر وضعیت پایانی Pـوضعیت است.

۲. در هر Nـوضعیت، دست‌کم یک حرکت به Pـوضعیت منجر می‌شود.

۳. در هر Pـوضعیت، هر حرکتی به Nـوضعیت منجر می‌شود.

الگوریتم. با استفاده از روشی استقرایی و با توجه به نتیجهٔ بالا می‌توان نوع وضعیتهای ممکن در بازی را تعیین کرد:

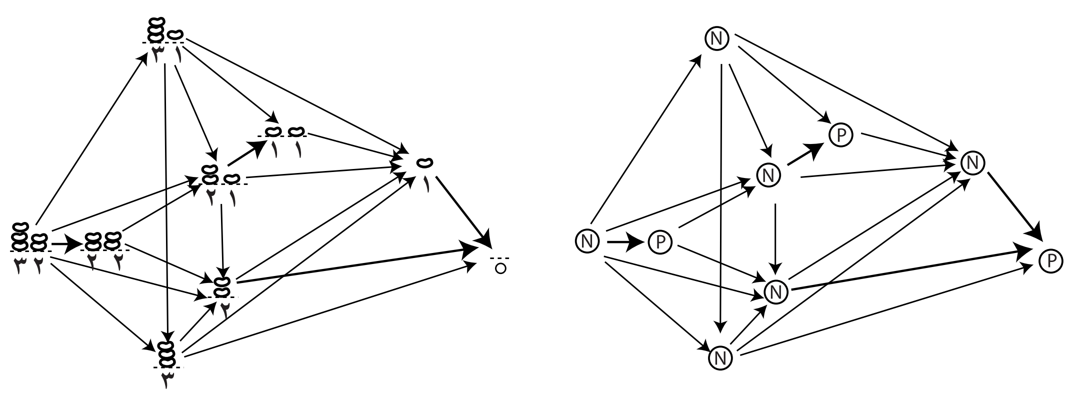
۱. هر وضعیت پایانی را P می‌نامیم.

۲. تمام وضعیتهایی را که به Pـوضعیتی دسترسی دارند، N می‌نامیم.

۳. هر وضعیتی را که تمام حرکتهای آن منجر به وضعیتهای N می‌شوند، P می‌نامیم.

۴. اگر در مرحلهٔ ۳، Pـوضعیت جدیدی نیافتیم، متوقف می‌شویم. در غیر این‌صورت به مرحلهٔ ۲ بازمی‌گردیم.

مثال ۵ . به شکل ۱ توجه کنید. در اینجا گرافی جهت‌دار به بازی نیم نسبت داده شده است. سپس به کمک الگوریتم بالا نوع وضعیتها تعیین شده است.



شکل ۱. بازی نیم

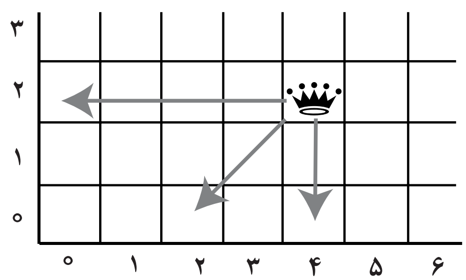
5. previous player   6. next player

با لم زیر رابطهٔ استراتژی برد و استراتژی «نباختن» مشخص می‌شود.

لم ۶ . اگر در بازی‌ای با اطلاعات کامل و تعداد متناهی وضعیت، نفر اول استراتژی برد نداشته باشد نفر دوم استراتژی نباختن دارد.

برهان. اگر بازیکن اول استراتژی برد نداشته باشد، نمی‌تواند به هیچ P ـوضعیتی حرکت کند. پس از اینکه او حرکت کرد، بازیکن دوم دست‌کم حرکتی به وضعیتی غیر N دارد، زیرا در غیر این‌صورت او در Pـوضعیت قرار داشته است که با آنچه گفتیم در تناقض است. اگر بازیکن دوم همین استراتژی را ادامه دهد، این ناوردا برای او وجود دارد: بازیکن دوم هیچ‌گاه بازی را در Pـوضعیت شروع نمی‌کند. به‌ویژه نوبت بازی هیچ‌گاه در وضعیتی پایانی به او نخواهد رسید. این همان استراتژی «نباختن» مطلوب است. ∎

تمرین ۷ . در بازی وزیر ویتوف، از خانهٔ (m,n) صفحهٔ شطرنج، هر بازیکن در نوبت خود وزیر را به پایین یا به چپ و یا به‌طور مورب به پایین و چپ حرکت می‌دهد. بازیکنی که وزیر را به خانهٔ $(0,0)$ برساند، برنده است. با استفاده از الگوریتم ۳ ثابت کنید که دنبالهٔ Pـوضعیتهای این بازی، دنبالهٔ $\{(0,0),(1,2),(3,5),(4,7),(6,10),(8,13),\ldots\}$ است. ضابطهٔ این دنباله چنین است: عنصر $(i+1)$ام به‌صورت $(k,k+i)$ است که در آن k کوچک‌ترین عددی طبیعی‌ای است که در هیچ مؤلفه‌ای از i عنصر اول دنباله ظاهر نشده است. می‌توانید درستی این ادعا را امتحان کنید![7] توجه کنید که این بازی همان بازی نیم دوتوده‌ای است که به آن یک حرکت مجاز اضافه شده است: بازیکنان می‌توانند در هر حرکت به تعداد مساوی از هر دو توده لوبیا بردارند.



شکل ۲. بازی وزیر ویتوف

۴. بازیهای دیگر

در این بخش بازیهای دیگری معرفی کنیم و سعی می‌کنیم آنها را تحلیل کنیم. مشاهده خواهید کرد که بازی نیم از اهمیت زیادی برخوردار است.

7. http://www.cut-the-knot.org/pythagoras/withoff.shtml

۱.۴ بازی تفریق

در این بازی زیرمجموعه‌ای متناهی از اعداد طبیعی مانند S مفروض است. عددی طبیعی مانند n (معمولاً به‌اندازهٔ کافی بزرگ) در نظر بگیرید. در هر نوبت، بازیکن یکی از اعضای S را از این عدد کم می‌کند، به این شرط که حاصل تفریق نامنفی باشد. بازی نیم یک‌توده‌ای با توده‌ای به بزرگی n، بازی تفریقی با $S = \{۱, ۲, \ldots, n\}$ است.

برای تحلیل این بازی می‌توانید به‌آسانی از الگوریتم ۳ استفاده کنید. مثلاً فرض کنید $S = \{۱, ۳, ۴\}$. حالت پایانی ۰ است و یکتاست (توجه کنید که اگر $۱ \notin S$ ممکن است چنین نباشد). پس وضعیتهای ۱، ۳ و ۴ همگی Nـوضعیت‌اند. اما ۲ Pـوضعیت است زیرا تنها حرکت مجاز از این وضعیت به ۱ است که خود Nـوضعیت است. با بازگشت به مرحلهٔ دوم الگوریتم نتیجه می‌شود که ۵ و ۶، Nـوضعیت‌اند. پس ۷ Pـوضعیت است زیرا از آن فقط به Nـوضعیتهای ۳، ۴ و ۶ می‌توان حرکت کرد. می‌توانید به‌استقرا ثابت کنید که وضعیتهای بازی، تناوبی به طول ۷ دارند و در آنها الگوی $PNPNNN$ تکرار می‌شود.

تمرین ۸ . نسخهٔ میزر از بازی تفریق را تحلیل کنید. (در این بازی هدف هر بازیکن این است که حریف را مجبور کند آخرین مهره را بردارد.)

تمرین ۹ . در این بازی دو جعبه به‌ترتیب با m و n مهره موجود است. بازی در وضعیت (m, n) شروع می‌شود. هر حرکت عبارت است از خالی کردن یک جعبه و تقسیم مهره‌های جعبهٔ دیگر بین این دو جعبه به‌قسمی که در هر یک دست‌کم یک مهره قرار بگیرد. مانند قبل، بازیکنی که آخرین حرکت را بکند برنده است. وضعیت پایانی این بازی $(۱, ۱)$ است و یکتاست (چرا؟). Pـوضعیتهای این بازی را تعیین کنید.

۲.۴ نیمِ فیبوناتچی

این بازی به ردهٔ بزرگ‌تری از بازیها که به بازیهای تفریق دینامیکی معروف‌اند تعلق دارد. در این نوع بازیهای تفریق، تعداد مهره‌هایی که هر بازیکن اجازه دارد به تعداد مهره‌هایی که در حرکت قبل برداشته شده است بستگی دارد. ضمناً، نفر اول مجاز نیست که هیچ مهره‌ای برندارد یا همهٔ توده را بردارد. تحلیل بازیهای تفریق دینامیکی حتی در هنگامی که تعداد مهره‌های ممکن برای برداشتن در هر حرکت تابع بازگشتی ساده‌ای از حرکات قبل باشد، مسئله‌ای دشوار است.

حالت خاصی از این رده از بازیها، نیم فیبوناتچی نام دارد. در نیم فیبوناتچی هر بازیکن حداکثر به‌اندازهٔ دوبرابر تعداد مهره‌های برداشته‌شده در حرکت قبل اجازه دارد مهره بردارد. می‌توانید این بازی را در اینترنت بازی کنید.[8]

8. http://www.cit.gu.edu.au/teaching/1104CIT/examples/FNim/Applet/example1.html

نخست به این قضیه توجه کنید:

قضیهٔ ۱۰ (نمایش زکندرف[۹]). هر عدد طبیعی را می‌توان به‌طور یکتا به‌صورت مجموع اعداد فیبوناتچی متمایزِ دوبه‌دو غیرمتوالی نوشت. یعنی اگر N عددی طبیعی باشد،

$$N = f_{k_1} + f_{k_2} + \cdots + f_{k_r}$$

که در آن به‌ازای هر عدد مانند i که $1 \leqslant i \leqslant r$، $k_i \geqslant 2$ و $k_{i+1} > k_{i+2}$.

با استفاده از این قضیه و استقرا ثابت کنید که بازیکن اول استراتژی برد دارد اگر و فقط اگر تعداد مهره‌ها در ابتدای بازی عددی فیبوناتچی نباشد. برای راهنمایی به این مثال توجه کنید: اگر توده‌ای از $43 = 34 + 8 + 1$ لوبیا تشکیل شده باشد، بازیکن اول در حرکت خود ۱ لوبیا از توده برخواهد داشت. حالا می‌توان تصور کرد که او بازیکن دوم در نیم فیبوناتچی با ۸ لوبیاست با این شرط اضافه که حریف او در حرکت خود اجازه ندارد نصف یا تعداد بیشتری از لوبیاها را بردارد. ثابت کنید که او می‌تواند این بازی را ببرد. همین وضعیت به‌ازای ۳۴ لوبیا تکرار خواهد شد.

۳.۴ نیمبل (Nimble)

روی نواری خانه‌ها از راست به چپ با اعداد ۰، ۱، ۲ و ... شماره‌گذاری شده‌اند. تعداد متناهی سکه در خانه‌های (نه لزوماً متمایز) این نوار قرار داده شده است. هر بازیکن در نوبت خود، یکی از سکه‌ها را انتخاب می‌کند و آن را در خانه‌ای با شمارهٔ کوچک‌تر قرار می‌دهد. در این عمل، اینکه سکهٔ انتخاب‌شده از روی یک یا چند سکه بگذرد و یا در خانه‌ای قرارگیرد که یک یا چند سکهٔ دیگر در آن قرار دارد، مجاز است. سکه‌ای راکه روی خانهٔ صفرم قرار می‌گیرد دیگر نمی‌توان حرکت داد. برنده کسی است که آخرین حرکت را بکند. می‌توانید مشاهده کنید که این بازی همان بازی نیم است.[۱۰]

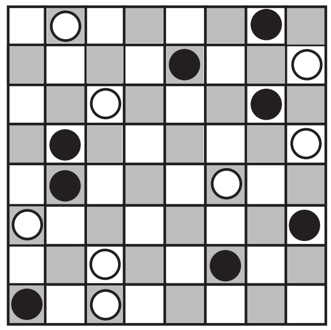
۴.۴ نیمِ پوکری

این بازی همان بازی نیم است، با این تفاوت که بازیکنان مجازند حرکت دیگری نیز بکنند: هر بازیکن سبدی از تعدادی متناهی لوبیا دارد و می‌تواند در حرکت خود به‌جای برداشتن لوبیا از توده‌ای که انتخاب کرده است، تعدادی متناهی لوبیا به آن بیفزاید. به‌سادگی می‌توانید دریابید که بازیکنی که در بازی نیم استراتژی برد داشته باشد در این بازی نیز استراتژی برد دارد (او چگونه می‌تواند اثر اضافه شدن لوبیاها را خنثی کند؟).

9. Zeckendorf 10. http://www.cut-the-knot.org/recurrence/Nimble.shtml

۵.۴ نورث‌کات (Northcott)

در صفحه‌ای شطرنجی، که در هر سطر آن یک مهرهٔ مشکی و یک مهرهٔ سفید قرارگرفته است، بازیکنهای سفید و مشکی، به‌نوبت با هم بازی می‌کنند و هر یک در نوبت خود یکی از مهره‌های خود را در سطری که قرار دارد به چپ یا راست حرکت می‌دهد (هر یک از بازیکنها فقط اجازه دارد مهره‌های خود را حرکت دهد و در نتیجه این بازی منصفانه نیست). بازیکنان اجازه ندارند مهرهٔ خود را روی مهرهٔ نفر دیگر قرار دهند و یا از روی آن بگذرند. این بازی بسیار شبیه نیم پوکری است. آن را بازی کنید.[۱۱]



شکل ۳. بازی نورث‌کات

۶.۴ دلار نقره

این بازی ـ مانند نیمبل ـ روی نواری بلند بازی می‌شود. مانند قبل، سکه‌هایی روی این نوار قرار دارند. ولی در اینجا سکه‌ها نباید روی هم قرار بگیرند، ضمناً فقط لغزاندن سکه‌ها مجاز است، یعنی نمی‌توان سکه‌ها را از روی هم عبورداد. طبق معمول برنده کسی است که آخرین حرکت مجاز را بکند. آیا می‌توانید بگویید چرا این بازی نیز شبیه بازی نیم پوکری است؟ (در اینجا می‌توانید تعداد خانه‌های خالی بین سکه‌ها را تعداد لوبیاهای تودهٔ نیم فرض کنید.).[۱۲]

بازی دلار نقره مانند بازی قبل است، با این تفاوت که در انتهای نوار کیسه‌ای قرار دارد. ضمناً یکی از سکه‌ها «سکهٔ نقره» نام دارد و ارزش آن از مجموع ارزش تمام سکه‌های دیگر بیشتر است. یک حرکت دیگر نیز در این بازی مجاز است: بازیکن اجازه دارد به‌جای حرکت کردن، کیسه را بردارد و بازی را ترک کند. در این‌صورت او محتوای کیسه را برده است و حریف او سکه‌های روی نوار را. خود را قانع کنید که برنده کسی است که حریف خود را مجبور کند که دلار نقره را به درون کیسه بیندازد.

11. http://www.cut-the-knot.org/recurrence/Northcott.shtml

12. http://www.cut-the-knot.org/Curriculum/Games/NoSilverDollar.shtml

برای تحلیل این بازی کافی است از این ایده استفاده کنید: تا هنگامی که سکهٔ سمت راست کیسه، سکهٔ نقره نیست آن را خانه‌ای اشغال‌نشده در نظر بگیرید، و هنگامی که سکهٔ نقره اولین سکهٔ بعد از کیسه بود آن را خانه‌ای پر در نظر بگیرید.

شکل ۴. بازی دلار نقره بدون دلار نقره‌ای

۵. تحلیل بازی نیم

در بخش ۲ بازی نیم را معرفی کردیم. استراتژی برد در نیم nتوده‌ای در حالت $n \geqslant 3$ چندان بدیهی نیست. ابتدا **جمع نیمی** دو عدد صحیحی نامنفی را چنین تعریف می‌کنیم: دو عدد را در مبنای دو جمع می‌کنیم ولی دو بر یک نمی‌کنیم.

تعریف ۱۱ (جمع نیمی). جمع نیمی دو عدد $(x_m \ldots x_0)_2$ و $(y_m \ldots y_0)_2$ برابر است با

$$(x_m \ldots x_0)_2 \oplus (y_m \ldots y_0)_2 = (z_m \ldots z_0)_2$$

که در آن به‌ازای هر عدد مانند k که $0 \leqslant k \leqslant m$، (به پیمانهٔ ۲) $z_k \equiv x_k + y_k$.

قضیهٔ ۱۲ . (بوتون[13]، ۱۹۰۲) وضعیت $(x_1, \ldots, x_n)$ در بازی نیم، Pـوضعیت است اگر و فقط اگر $x_1 \oplus \ldots \oplus x_n = 0$.

برهان.

۱. هر وضعیت پایانی Pـوضعیت است و در نیم، این وضعیت، وضعیت یکتای $(0, \ldots, 0)$ است و $0 \oplus \ldots \oplus 0 = 0$.

۲. از هر وضعیتی که در آن جمع نیمی ناصفر است، حرکتی به وضعیتی با جمع نیمی صفر موجود است: جمع نیمی را به‌شکل جمع ستون‌به‌ستون در مبنای دو بنویسید. اولین ستون سمت چپ را که در آن جمع نیمی آن ستون ناصفر شده است در نظر بگیرید. این اولین ستونی است که در آن تعداد فردی ۱ ظاهر می‌شود. عددی شامل یکی از این ۱ها انتخاب کنید و این یک را به صفر تبدیل کنید. سپس در هر ستونی که تعداد ۱ها فرد است، با تغییر رقم متناظر با آن ستون در این سطر تعداد ۱ها را زوج کنید. تفاضل عدد قبلی از عدد جدید، مثبت است. به این تعداد از تودهٔ متناظر با این سطر لوبیا برمی‌داریم. این حرکت ما را به وضعیتی با جمع نیمی صفر می‌رساند.

13. C.L. Bouton

۳. اگر در وضعیتی از بازی، جمع نیمی صفر باشد، بازیکنی که نوبت اوست به‌ناچار بازی را به وضعیتی با جمع نیمی ناصفر خواهد برد. زیرا در غیر این‌صورت

$$x_1 \oplus x_2 \oplus \cdots \oplus x_n = 0 = x'_1 \oplus x_2 \oplus \cdots \oplus x_n$$

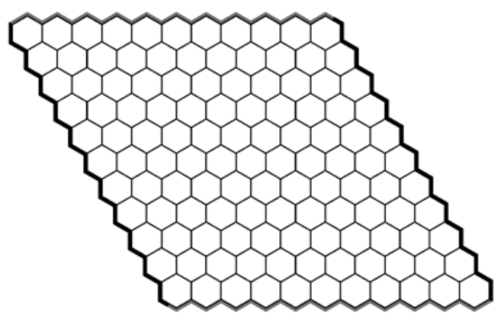
که از آن مشخص می‌شود که زوجیت ستونها در تبدیل x_1 به x'_1 تغییر نمی‌کند که یعنی این دو عدد، رقم‌به‌رقم برابرند. در این‌صورت هیچ لوبیایی برداشته نشده است ولی چنین حرکتی مجاز نیست.
از سه استدلال بالا حکم نتیجه می‌شود. ∎

۶. برهانهای وجودی

گاهی نمی‌توانیم به‌طور مؤثری استراتژی برد را در بازی مشخص کنیم، ولی می‌توانیم با اثباتی وجودی ثابت کنیم که بازیکنی استراتژی برد دارد. در چنین برهانی استراتژی برد معرفی نمی‌شود. در این قسمت با نمونه‌هایی از این بازیها آشنا می‌شویم. بازی هگز[14] یکی از این بازیهاست که در ۲۰ سال گذشته دانشمندان در رشته‌های ریاضی و علوم کامپیوتر به آن بسیار توجه کرده‌اند. ایده‌هایی که در تحلیل این بازی ارائه می‌کنیم در تحلیل بسیاری از بازیها کاربرد دارد.

۱.۶ هگز

صفحه‌ای $n \times n$، مانند شکل در نظر بگیرید. دو ضلع مقابل به رنگ سیاه و دو ضلع مقابل دیگر به رنگ خاکستری‌اند. بازیکن سیاه باید سعی کند با چیدن مهره‌های سیاه دو ضلع سیاه جدول را به‌هم وصل کند. بازیکن خاکستری باید همین کار را در مورد اضلاع خاکستری بکند. اگر هگز بازی کنید تکنیکهای زیادی برای آن خواهید یافت.



شکل ۵. بازی هگز

14. Hex

لم ۱۳ . بازی هگز همواره برنده دارد و به‌تساوی نمی‌انجامد.

برهان. فرض کنید بازی هگز تمام شده باشد. اگر برنده قبل از پر شدن صفحه مشخص شود بازی در همان‌جا به پایان می‌رسد. اکنون فرض کنید تمام صفحه با مهره‌ها پر شده باشد، حالا مهره‌های سیاه را مانند جریان آبی درنظر بگیرید که از یکی از اضلاع سیاه به ضلع سیاه دیگر در جریان است. دو حالت ممکن است اتفاق بیفتد: یا این جریان آب از سویی به سوی دیگر حرکت خواهد کرد که نشان‌دهندهٔ وجود مسیری برای آب از ضلعی به ضلع دیگر است، و این یعنی بازیکن سیاه بازی را برده است. (ضمناً در این‌صورت هیچ مسیر خاکستری‌ای بین اضلاع خاکستری وجود ندارد زیرا وجود آن مانع جریان آب می‌شود.) اگر چنین جریانی وجود نداشته باشد، مانعی جلوی حرکت آب قرار گرفته است که یعنی وجود سدی خاکستری‌رنگ از یک ضلع خاکستری به ضلع خاکستری دیگر. (به همین ترتیب واضح است که در این حالت مسیر سیاه رنگی بین اضلاع سیاه وجود ندارد.) در این حالت بازیکن خاکستری بازی را برده است.[۱۵] ■

نتیجهٔ ۱۴ . اگر در بازی هگز نفر اول استراتژی برد نداشته باشد آنگاه نفر دوم استراتژی برد دارد.

برهان. هگز بازی ترکیبیاتی‌ای با اطلاعات کامل و تعداد متناهی وضعیت است. بنابر لم ۶ اگر بازیکن اول استراتژی برد نداشته باشد، استراتژی نباختن دارد. اما بنابر لم ۱۳ این استراتژی نباختن در حقیقت استراتژی برد است. ■

قضیهٔ ۱۵. استراتژی برد در بازی هگز در دست بازیکن اول است.

برهان. ثابت کردیم یکی از بازیکنها استراتژی برد دارد. به برهان خلف، فرض کنید بازیکن دوم استراتژی برد دارد. در این‌صورت بازیکن اول می‌تواند الگوریتم او را از او «بدزدد». او پس از حرکتی تصادفی وانمود می‌کند که بازیکن دوم بازی است و در نتیجه استراتژی‌ای برای بردن حریف دارد. در این استراتژی هر جا لازم شود مهرهٔ خود را در جایی قرار دهد که خود قبلاً آن را اشغال کرده است، حرکت تصادفی دیگری می‌کند. به‌وضوح حرکت اضافی او را بازنده نخواهد کرد. پس بازیکن اول استراتژی برد دارد. این تناقض فرض خلف را باطل می‌کند. پس استراتژی برد برای بازیکن اول بوده است. ■

این بازی را پیت هاین[۱۶]، ریاضی‌دان دانمارکی، اختراع کرد. مجدداً در سال ۱۹۴۸ جان نش[۱۷] این بازی را ترتیب داد. استدلال بالا برای وجود استراتژی برد را او ارائه کرده است. بررسی پیچیدگی محاسباتی این بازی و یافتن استراتژیهای برد آن از مسائل جالب و امروزی علوم کامپیوتر نظری است.[۴] اگر می‌خواهید دربارهٔ هگز بیشتر بدانید، به نشریهٔ ریاضیات، شمارهٔ آبان ۱۳۸۲ نگاهی بیندازید.

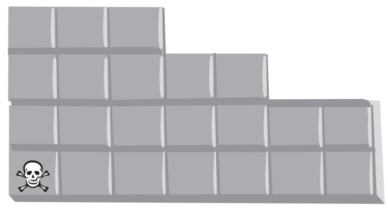
۱۵. اگر شما هم مانند نویسنده نمی‌توانید این برهان را برهانی ریاضی بدانید ناگزیر باید به [۳] مراجعه کنید. در این مقاله مطالب جالب دیگری نیز دربارهٔ ماهیت هندسی این مسئله خواهید یافت.

16. Piet Hein 17. John Nash

تمرین ۱۶ . ثابت کنید که اگر در بازی شطرنج بازیکنی در هر نوبت دو حرکت بکند، بازیکن سفید استراتژی نباختن دارد.

۲.۶ بازی گاز زدن!

تختهٔ شکلات مستطیل‌شکلی در نظر بگیرید. دو نفر به‌نوبت این شکلات را گاز می‌زنند به‌طوری که در هر بار تمام شکلاتهایی را که در بالا و سمت راست یکی از قطعات شکلات قرار دارند می‌خورند. اما قطعهٔ شکلاتِ پایین سمت چپ سمی است! بازیکنی که در حرکت خود مجبور شود این قطعه را بخورد، می‌بازد.



شکل ۶. بازی گاز زدن

تمرین ۱۷ . با استدلالهایی مشابه قسمت قبل ثابت کنید که بازیکن اول استراتژی برد دارد.

مراجع

1. Martin Gardner, "Mathematical Games: The Fantastic Combinations of John Comway's New Solitaire Game Life", *Scientific American*, October 1970, pp. 120-123.

2. A. J. Schwenk, "Take-Away Games", *Fibonacci Quarterly*, Vol. 8 (1970), pp. 225-234.

3. D. Gale, "The Game of Hex and the Brouwer Fixed-Point Theorem", *American Mathematical Monthly*, Vol. 86 (1979), 10, pp. 818-827.

4. T. Maarup, *Hex, Everything You Always Wanted to Know About Hex But Were Afraid to Ask*, Electronic Edition, 2005.

5. E. R. Berlekampl, J. H. Conway, R. K. Guy, *Winning Ways for Your Mathematical Plays*, 2nd ed., A. K. Peters, 2000.

6. A. Engel, *Problem Solving Strategies,* Springer-Verlag, 1997.

7. T. S. Ferguson, *Game Theory*, Electronic Edition.